Les fractions et les décimaux au CM1

Une nouvelle approche

Rémi BRISSIAUD

IUFM de Versailles

Laboratoire "Cognition et activités finalisées"

Unité C.N.R.S. 7021 (UPRESA Paris 8)

Actes du XXVème colloque des formateurs

et professeurs de mathématiques

chargés de la formation des maîtres

Loctudy les 11-13 Mai 1998

IREM de Brest

Pages 147-171

PLAN DU TEXTE

C’est vraisemblablement au CM1 que se jouent les compétences futures des élèves concernant les décimaux

Le temps que nous avons choisi de consacrer à l’apprentissage des fractions et des décimaux au CM1 est relativement important. Aussi convient-il tout d’abord de justifier un tel choix, en montrant que ce niveau de scolarité est vraisemblablement crucial pour l’appropriation de ces notions.

Les élèves comprennent mal les décimaux, ce qui les conduit à des erreurs systématiques qui, pour la plupart, sont bien connues des maîtres. Lors de l’évaluation d’entrée en 6e de 1993, par exemple, on demandait quel est le plus grand de ces deux nombres : "6987 et 6879". Avec ces entiers, 87% des élèves ont réussi. La même question avec les décimaux "1,015 et 1,05" n’a conduit qu’à 52% de réussite. Un tiers des élèves ont écrit que 1,015 est plus grand que 1,05. Vraisemblablement parce qu’ils ont comparé 15 et 5 sans se préoccuper que 15 désigne des millièmes alors que 5 désigne des centièmes.

Et lors de l'évaluation de 1997, il n'y a que 49% des élèves qui réussissent la division 67 : 100 posée en ligne. Pour un adulte cultivé, cet exercice est très facile car diviser par 100, c'est prendre le centième. On a donc 67 : 100 = 67/100 = 0,67. Il faut croire qu'un tel raisonnement est beaucoup plus difficile qu'il ne paraît.

On ne peut même pas se rassurer en remarquant qu'un taux de réussite d'environ 50% dans chacune de ces épreuves, est loin d'être négligeable car rien n'assure que les élèves qui réussissent ont bien compris les décimaux.

Concernant le premier exercice, on sait en effet que de nombreux maîtres enseignent la règle : "Pour comparer deux décimaux, on écrit des zéros à droite de la virgule jusqu'à ce qu'ils aient le même nombre de chiffres après la virgule". Un élève qui applique cette règle est conduit à comparer 1,015 et 1,050 et là, il ne se trompe plus parce que 15 < 50. A-t-il pour autant mieux compris ce que sont des centièmes par rapport à des millièmes ? Rien n'est moins sûr.

La division par cent possède, elle-aussi, sa règle : "Pour diviser un nombre par cent, je décale la virgule de 2 rangs vers la gauche". Il est vraisemblable que certains élèves réussissent en utilisant cette règle sans beaucoup de connaissances concernant les décimaux.

Enseigner de telles règles est même très probablement un "piège pédagogique" parce qu'en les appliquant, certains élèves réussissent diverses tâches portant sur des décimaux alors qu'ils n'ont fondamentalement pas compris ce qu'est un décimal.

Une telle analyse est-elle purement spéculative ?

Des résultats rapportés récemment par J. Bolon nous incitent à penser que non. Elle a proposé la tâche suivante à des élèves depuis la fin du CM1 jusqu'à la 5e.

Par rapport à 7, quel est le nombre le plus proche :

6,9 ou 7,08 ?

Le tableau suivant donne les pourcentages de réussite :

Classe	CM1	CM2	6°	5°
Réussite	22%	30%	27%	29%

Comment un expert effectue-t-il cette tâche ? Il calcule d'abord deux écarts : celui entre 6,9 et 7 est de 1 dixième, alors que celui entre 7 et 7,08 est de 8 centièmes. Comme 8 centièmes est plus petit que 1 dixième, c'est 7,08 le plus proche de 7. La solution est donc assez immédiate pour celui qui a bien conceptualisé les décimaux.

En revanche, l'élève qui doit calculer deux soustractions 7 - 6,9 et 7,08 - 7 (c'est-à-dire, en appliquant la fameuse règle : "7,0 - 6,9" et "7,08 - 7,00") puis comparer les résultats 0,1 et 0,08 (c'est-à-dire, en appliquant la règle 0,10 et 0,08) a peu de chance de réussir.

Comment expliquer l'erreur persistante selon laquelle 6,9 serait le nombre le plus proche de 7 ? Là encore, les enfants travaillent vraisemblablement sur l'écriture des nombres indépendamment de ce qu'ils représentent. Ils savent que pour passer de l'écriture "6,9" à l'écriture "7,0", il faut "ajouter un 1", alors que pour passer de "7" à "7,08", il faut "ajouter un 8". L'écart est plus grand quand on ajoute 8 que quand on ajoute 1 ! L'erreur observée résulte bien, là encore, d'un défaut de conceptualisation, les élèves raisonnant avec ces nouveaux nombres en appliquant des règles qui ne valent que pour les entiers.

Les résultats obtenus par J. Bolon conduisent à penser que :

1°) Un petit quart des élèves ont déjà une bonne conceptualisation des décimaux dès la fin du CM1 (Cf. le pourcentage de réussite observé).

2°) En revanche, ceux qui n'ont pas compris les décimaux à ce moment, ne les comprendront vraisemblablement pas beaucoup mieux dans les quelques années qui suivent (le pourcentage de réussite n'évolue guère durant les trois années suivantes).

L'enjeu des pratiques pédagogiques des maîtres de CM1 concernant les décimaux est donc crucial ! Avant d'envisager une manière de surmonter les difficultés que les élèves rencontrent, il importe de se demander quelle en est l'origine. Celle-ci est d'abord à chercher dans la nature même des décimaux, très différente de celle des entiers : ce sont des fractions qui permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue quelconque.

Retour au plan du texte

Qu'est-ce qu'un décimal ?

S'approcher d'aussi près que l'on veut d'un nombre "irrationnel"

Considérons ce problème classique : combien la diagonale d'un carré (d) mesure-t-elle, quand on prend le côté du carré (c) comme unité de longueur ? On voit immédiatement que la diagonale contient une fois le côté mais pas deux fois. Cette mesure, comprise entre 1 et 2, n'est donc pas un nombre entier.

Considérons une petite longueur égale à c/10. Il serait assez facile de montrer qu'on peut la reporter 14 fois sur d, mais pas 15 fois. On a donc :

$14/10\ c < d < 15/10\ c$ ou encore : $1{,}4\ c < d < 1{,}5\ c$

Et en considérant une longueur encore plus petite, égale à c/100, il serait assez facile de montrer qu'on peut la reporter 141 fois sur d, mais pas 142 fois. On a donc :

$141/100\ c < d < 142/100\ c$ ou encore : $1{,}41\ c < d < 1{,}42\ c$

Il importe de remarquer qu'à l'étape précédente, on avait placé d entre deux nombre (14/10 c et 15/10 c) dont l'écart est c /10 et qu'on vient de le placer entre deux nombres (141/100 c et 142/100 c) dont l'écart est 10 fois plus petit : c / 100.

En continuant de la sorte, on peut s'approcher d'aussi près que l'on veut de la mesure de la diagonale du carré. On n'exprimera jamais une mesure exacte de cette longueur : on sait en effet que le nombre (Ã2) dont on s'approche ainsi est dit *irrationnel*, ce qui signifie qu'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction p/q. En revanche, on s'en approche d'aussi près que l'on veut par le développement décimal que nous venons d'amorcer : 14/10, 141/100, 1414/1000, 14142/10000,etc.

C'est pour cela que le système des nombres décimaux (c'est-à-dire des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10) a été inventé : ce système de fractions permet d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure de n'importe quelle grandeur continue. Les mathématiciens parlent du "filtre décimal". Il s'agit d'un filtre particulièrement intéressant parce qu'on peut régler à volonté la "taille des trous".

S'approcher d'aussi près que l'on veut d'un nombre "rationnel"

Rappelons d'abord que les nombres rationnels sont ceux qui peuvent s'écrire sous forme de fractions. A l'école élémentaire, c'est essentiellement en essayant d'approcher la valeur d'un rationnel, que les enfants vont prendre conscience de l'intérêt des nombres décimaux. Considérons par exemple ce problème : "Lorsqu'elles sont empilées, 7 feuilles de cartons identiques forment une épaisseur totale de 10 mm. Quelle est l'épaisseur de l'une d'elle ?"

Il s'agit donc de partager équitablement l'épaisseur totale de 10 mm entre les 7 feuilles identiques. Chaque feuille a une épaisseur légèrement supérieure à 1 mm. L'opération qui permet d'obtenir le résultat est une division-partition, mais une division différente de la division euclidienne parce que le reste (3 mm) doit lui aussi être partagé entre les 7 feuilles (il s'agit donc d'une "division où l'on partage le reste").

Le lecteur sait que, dans ce cas là, on peut "pousser la division après la virgule", ce qui permet d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure de l'épaisseur d'une feuille, grâce à une suite décimale : 1,42857 mm, par exemple.

En revanche, les adultes cultivés ne savent pas toujours qu'il est possible d'exprimer exactement cette mesure en utilisant un rationnel : 10 divisé par 7 est très exactement égal à 1 + 3/7. Cette égalité s'obtient facilement à partir de celle de la division euclidienne : quand on divise 10 par 7, le quotient est 1 et il reste 3. Or ces 3 mm qui restent doivent eux aussi être répartis entre les 7 feuilles, ce qui donne "3 divisé par 7" *ou* 3/7 (cette conjonction "ou" exprime une équivalence qui sera minutieusement analysée plus loin).

Alors que le résultat de la division de 10 par 7 s'exprime exactement sous la forme 1 + 3/7, comment se fait-il que la plupart du temps, on privilégie une approximation décimale de ce nombre, à savoir 1,4285... ? Formulons différemment cette question : on comprend aisément l'utilisation du "filtre décimal" dans le cas des irrationnels, parce que ces nombres ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions. Mais pourquoi l'utilise-t-on également dans le cas des rationnels ?

Parce qu'il est plus facile de comparer, de faire des approximations et de calculer avec des développements décimaux qu'avec des expressions exactes qui utilisent les fractions.

Pour comparer 4/7 et 3/5 à partir de leur écriture fractionnaire, par exemple, il faut les "réduire au même dénominateur". On obtient 4/7 = 20/35 et 3/5 = 21/35, ce qui permet de conclure. Le problème de comparaison est résolu, mais on ne sait guère "ce que vaut" chacune des fractions. En revanche, dès le second chiffre après la virgule, on voit que 4/7 = 0,57... alors que 3/5 = 0,6. Dès ce moment, on peut non seulement conclure que 4/7 est plus petit que 3/5 mais, de plus, on situe chacune des fractions par rapport à 1/2 et 3/4, on a une bonne approximation de leur écart, etc.

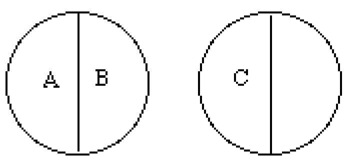
De même, lorsqu'il s'agit d'additionner, soustraire, etc., il est le plus souvent extrêmement commode d'opérer sur des valeurs approchées décimales, parce que les calculs ressemblent à ceux qu'on effectue sur les entiers.

Un projet présent dès l'invention des fractions.

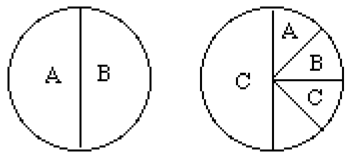
Les nombres décimaux sont une invention récente (vers la Renaissance). En revanche, le projet auquel ils répondent (approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue) est très ancien et remonte au moins à l'Egypte Antique, c'est-à-dire à l'invention des fractions unitaires. D'une façon générale, les seules fractions que les Egyptiens utilisaient à cette époque, étaient les fractions de numérateur 1 (c'est pour cela qu'on les appelle "unitaires") : 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, etc. En fait, dans de nombreux contextes (mesures de capacités de céréales, d'agrumes ou de liquides), l'ensemble des fractions utilisées était encore plus restreint puisqu'il se réduisait à celles dont le dénominateur est une puissance de 2 : 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 et 1/64.

Or un tel système de fractions, lorsqu'on le prolonge, fonctionne comme un filtre analogue au filtre décimal. Montrons par exemple, qu'il permet d'approcher d'aussi près que l'on veut le résultat du partage de 2 galettes entre 3 personnes A, B et C.

On commence par donner 1/2 galette à chacune des 3 personnes. Comme 2 = (1/2 + 1/2 + 1/2) + 1/2, il reste encore 1/2 galette à partager.



On peut alors songer à distribuer des parts deux fois plus petites, correspondant donc à 1/4 de galette. Cependant, dans la 1/2 galette restante, on ne dispose pas de trois parts de 1/4 de galette. En revanche, avec des parts deux fois plus petites encore (1/8 de galette), on peut en distribuer une à chacune des 3 personnes. Comme 1/2 = (1/8 + 1/8 + 1/8) + 1/8, chaque personne possède alors 1/2 + 1/8 galette et il reste encore 1/8 galette à partager .



Le même raisonnement peut être poursuivi, montrant qu'en distribuant 1/2 + 1/8 + 1/32 + 1/128 + ...galette à chaque personne (en "sautant" un dénominateur possible sur deux), on s'approche de plus en plus de la valeur cherchée. On vient de montrer qu'en utilisant le filtre de fractions unitaires 1/2, 1/4, 1/8, 1/16..., on peut approcher la fraction 2/3, qui n'est pas unitaire, d'aussi près que l'on veut. D'un point de vue théorique, ces fractions unitaires et les décimaux ont la même fonction.

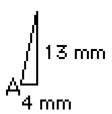
Le concept de fraction a beaucoup évolué depuis son invention

Les fractions unitaires des Egyptiens antiques sont très simples à comprendre. En revanche, la notion de rationnel est devenue aujourd'hui extrêmement complexe parce qu'un même nombre rationnel permet de rendre compte d'opérations mentales très diverses. En fait, les chercheurs en didactique des mathématiques font des analyses différentes des divers sens d'un rationnel.

Avançons une analyse possible en considérant par exemple la fraction 13/4 et en distinguant les sortes de grandeurs que 13 et 4 sont susceptibles de représenter.

1°) Soit les nombres 13 et 4 renvoient à des grandeurs de natures différentes et alors 13/4 se lit le plus souvent "13 pour 4". Dans ce cas, la fraction désigne ce qu'on appelle habituellement une *proportion* (13 cas de maladie pour 4 milliers d'habitants, par exemple), proportion qui permet souvent de définir ce qu'on appelle une "grandeur-quotient" : une vitesse (13 kilomètres en 4 heures), un rendement (13 hectolitres d'alcool pour 4 tonnes de raisins), etc.

2°) Soit les nombres 13 et 4 renvoient à des grandeurs de même nature et la fraction 13/4 désigne alors un *rapport*. Dans le triangle ci-dessous, par exemple, le rapport 13 mm / 4 mm est un rapport trigonométrique (la tangente de l'angle A).



Dans ce cas, 13/4 se lit souvent "13 divisé par 4". Cette fraction renvoie à une "division-quotition" : "En 13 mm, combien de fois 4 mm ?".

3°) Soit le nombre 13 renvoie à une grandeur alors que le nombre 4 est sans dimension. Dans ce cas, la fraction 13/4 (pour 13 mm / 4, par exemple) se lit également "13 divisé par 4" mais elle renvoie au partage de la totalité des 13 mm en 4 parties égales. Il s'agit d'une "division - partition de la pluralité"

4°) Soit, enfin, le nombre 13 est sans dimension et il opère sur 1/4 (13 fois un quart de mm, par exemple). La fraction 13/4 se lit alors "13 quarts" et il s'agit d'une "partition de l'unité suivie d'une multiplication" que nous appellerons, de manière abrégée, "fractionnement de l'unité".

Quatre significations sont ainsi distinguées : proportion, rapport, partition de la pluralité et fractionnement de l'unité. La situation apparaît donc singulièrement complexe. A terme, les élèves doivent s'approprier ces différents sens de 13/4. Nous verrons qu'au CM1, l'accès aux deux premiers sens ne nous semble pas constituer un objectif raisonnable. Seule une "sensibilisation" à ces usages des fractions est d'actualité. En revanche, nous montrerons qu'il est très important que, dès ce niveau de la scolarité, les enfants s'approprient l'équivalence : "13 partagé en 4" (division - partition de la pluralité), c'est aussi "13 quarts" (fractionnement de l'unité).

Ce que nous a appris ce "détour épistémologique"

D'un point de vue conceptuel, l'intérêt fondamental des nombres décimaux est intrinsèquement lié à leur nature de fractions : ils permettent d'approcher la mesure de n'importe quelle grandeur continue d'aussi près que l'on veut (au cent millième près, par exemple). Si l'invention des décimaux est récente, le projet auquel ils répondent est, lui, très ancien, et il existe une façon élémentaire de réaliser ce projet : l'utilisation des fractions unitaires 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, etc. Mais les décimaux ne sont pas des fractions unitaires et dès qu'une fraction n'est pas unitaire, sa complexité conceptuelle s'accroît. Concernant la fraction "3 sur 4", par exemple, nous verrons qu'il ne va pas de soi que "3 divisé par 4" est égal à "3 quarts".

Finalement, toute pédagogie des décimaux dépend crucialement de la réalisation de deux objectifs, que nous allons examiner successivement :

1°) Aider les élèves à s'approprier le projet auquel répondent les décimaux.

2°) Les aider à surmonter les difficultés de conceptualisation inhérentes aux fractions qui ne sont pas unitaires.

Un obstacle important à la réalisation du premier objectif est le fait que les décimaux s'écrivent souvent sous la forme de nombres à virgule et qu'alors, les élèves peuvent être victimes d'une sorte d'effet "Canada Dry".

Retour au plan du texte

Les décimaux écrits avec une virgule : ça ressemble à des entiers, ça se manipule comme des entiers, alors que ce ne sont pas des entiers

D'un point de vue conceptuel, on vient de le voir, l'intérêt fondamental des nombres décimaux est intrinsèquement lié à leur nature de fractions : ils permettent d'approcher la mesure de n'importe quelle grandeur continue d'aussi près que l'on veut (au cent millième près, par exemple). Or cette nature de fraction est masquée par l'écriture sous forme de nombres à virgule. En effet :

- Quand on écrit les décimaux sous forme de nombres à virgule, ils ressemblent à des entiers et non à des fractions. Remarquons par exemple que dans cette forme d'écriture, comme dans celle d'un entier, il existe toujours un "chiffre des unités", alors que ce n'est pas le cas dans l'écriture des fractions. Dans 358 m, par exemple, c'est le chiffre "8" qui désigne directement des mètres (les autres désignent des dizaines, etc.). Dans 42,56 m, c'est le chiffre "2". En revanche, dans 4256/100 m, aucun chiffre ne renvoie directement à des mètres parce que le dénominateur indique un fractionnement de cette unité (il s'agit de 100ièmes de mètre) et le numérateur le nombre de tels fractionnements retenus : le "6" de 4256 désigne donc des 100ièmes et non des unités.

- De même, quand on calcule avec les décimaux écrits sous forme de nombres à virgule, qu'il s'agisse d'une addition, d'une soustraction ou d'une multiplication, la façon d'opérer est très proche de celle qu'on utilise avec les entiers et éloignée de celle qu'on utilise avec les fractions. Pour l'addition et la soustraction, dans les cas des écritures à virgule comme dans celui des entiers, on commence par positionner les chiffres en colonnes. Dès lors, dans le maniement de ces écritures à virgule, il ne reste plus de trace visible de la "réduction au même dénominateur" (14/100 + 3/10 = 14/100 + 30/100) qui est caractéristique de l'addition ou la soustraction des fractions. Pour la multiplication, avec les écritures à virgule, on commence par "faire comme s'il n'y avait pas de virgule" ; on a donc très vite l'impression d'opérer sur des entiers.

- Enfin, un adulte qui oralise un nombre à virgule (13,62 par exemple), énonce successivement deux entiers : il dit le plus souvent "treize virgule soixante deux" et non "treize virgule soixante deux centièmes". Dans la première façon d'oraliser, la plus courante vraisemblablement parce qu'elle est la plus courte, le mot "centièmes" a disparu, il ne subsiste aucun indice du fait qu'on désigne ainsi une fraction. Là encore, la façon d'oraliser les nombres à virgule est proche de celle des entiers, éloignée de celle des fractions.

En résumé, les nombres décimaux, dès qu'ils sont écrits avec une virgule, ressemblent à des entiers, ils se manipulent comme des entiers, ils s'oralisent le plus souvent comme des entiers alors que, fondamentalement, d'un point de vue conceptuel, ce sont des fractions. L'écriture à virgule est un système économique de notation des décimaux qui facilite les calculs mais qui masque leur véritable nature.

Retour au plan du texte

Un premier choix fondamental : enseigner d'abord les décimaux sous forme de fractions décimales

Toute progression pédagogique concernant les décimaux conduit d'abord à s'interroger sur le mode d'écriture qu'il convient d'enseigner en premier : faut-il commencer par les nombres à virgule ou les fractions décimales ?

Nous avons choisi d'enseigner d'abord les décimaux sous la forme de fractions décimales. Ce choix résulte en premier lieu d'analyses que G. Brousseau a été le premier à développer. Longtemps, les décimaux ont été enseignés comme un recodage de mesures entières. Dans une telle approche 3,25 mètres, c'est, par définition, 325 cm. Ou encore : 3,25 est défini comme l'écriture de 325 "en prenant la centaine comme unité". Du coup, l'idée de fractionnement disparaît. Ce système de notation fonctionne comme celui des heures et des minutes, à la différence près que le groupement se fait par 10. On parle souvent à propos d'un tel système de "nombres complexes". Il se différencie de celui des décimaux du fait qu'on y groupe des unités, sans jamais les fractionner.

Les nombres décimaux ont été inventés pour permettre d'approcher la mesure d'une grandeur continue d'aussi près que l'on veut, grâce à des fractionnements de plus en plus fins (dixièmes, centièmes, etc.). C'est leur raison d'être. Faire disparaître l'idée de fractionnement dans une progression didactique concernant les décimaux, c'est donc "passer à côté" de son objet d'étude, c'est quasiment décider de ne pas enseigner les décimaux, de laisser les élèves qui le peuvent, les inventer eux-mêmes.

Une autre progression pédagogique est évidemment souhaitable : celle où l'on commence par présenter aux élèves les fractions, dont les fractions décimales, en utilisant la barre de fraction comme système de notation ; puis, dans un deuxième temps, l'écriture à virgule de ces fractions décimales.

Rappelons que l'écriture à virgule des nombres décimaux est une conquête récente de l'humanité (elle date de la Renaissance). Vouloir que les enfants conceptualisent d'emblée les décimaux avec cette sorte d'écriture, alors qu'elle masque leur véritable nature, ne peut qu'échouer pour la plupart d'entre eux. Il est important que les enfants travaillent longtemps avec des nombres décimaux représentés par des fractions décimales.

Ce parcours est, à notre sens, le seul qui laisse un espoir de voir un jour les élèves conceptualiser les décimaux à l'école élémentaire dans une proportion supérieure aux résultats actuels.

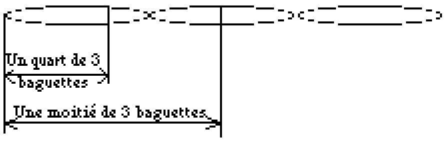
Cependant, ce premier choix n'est pas suffisant. La disparition de l'idée de fractionnement n'est pas le seul risque qu'encourt une progression. Il faut de plus s'intéresser à la manière dont on enseigne le fractionnement.

Retour au plan du texte

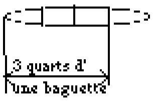
Une équivalence fondamentale pour conceptualiser les fractions : partition de la pluralité et fractionnement de l'unité

Nous avons vu qu’une écriture telle que 3/4 peut avoir quatre sens : *3 pour 4* (proportion), *3 divisé par 4* dans le cas du rapport (c’est-à-dire de la division - quotition), *3 divisé par 4* dans le cas de la division - partition de la pluralité et *3 quarts* (fractionnement de l'unité). Montrons que même lorsqu’on s’intéresse seulement aux derniers sens, qui sont les plus simples, leur équivalence ne va pas de soi. Il n’est guère évident que "3 divisé par 4" (partition de la pluralité) et "3 quarts" (fractionnement de l'unité) conduisent au même résultat.

S’il s’agit de partager une quantité de 3 baguettes de pain en 4 parts égales, par exemple, pour procéder à la partition de cette totalité ("3 divisé par 4"), on peut prendre la moitié de la moitié de 3 baguettes :



Il ne va guère de soi que la grandeur d'une part corresponde à 3 quarts de baguette (3/4), c’est-à-dire s'obtient aussi de la manière suivante : on prend une seule baguette (et non plus 3) ; on la partage en 4 et l'on considère la partie formée par 3 de ces morceaux.



C’est seulement dans le cas des fractions unitaires, que les deux sens coïncident de manière évidente : 1 divisé par 2, c’est, par définition, 1 demi ; de même, 1 divisé par 3, c’est, par définition, un tiers, etc. Dès qu’on n’est plus dans le cas de fractions unitaires, l’équivalence entre la partition de la pluralité et le geste mental consistant en un fractionnement de l'unité, ne va plus de soi.

Or cette équivalence est celle qui "fonde" le concept de fraction : elle justifie le fait que les deux gestes mentaux précédents soient désignés de la même façon, par la barre de fraction, et qu'on puisse lire indifféremment 13/4 comme "13 divisé par 4" ou comme "13 quarts", c’est-à-dire, à loisir, substituer un geste à l'autre.

Retour au plan du texte

Un 2e choix fondamental : donner d’abord du sens à *a/b* dans un contexte de partition de la pluralité

Une progression pédagogique où l’on enseigne d’abord les décimaux sous forme de fractions décimales n’est pas suffisante pour que les enfants conceptualisent ces nombres. En effet, depuis une dizaine d’années, il est courant que les maîtres procèdent ainsi et rien n’indique que, de façon globale, les élèves, aujourd’hui, conceptualisent mieux les décimaux qu’auparavant.

L’explication de ce phénomène est vraisemblablement la suivante : les enfants conceptualisent mal les décimaux (et ceci bien qu’on les leur présente comme fractions décimales) parce que, plus généralement, ils conceptualisent mal les fractions. En effet, dans la quasi-totalité des progressions, lors de la séance d’introduction des fractions, le sens dont on favorise l’appropriation est celui qui est lié au fractionnement de l'unité (11/4 est d’abord défini comme "onze quarts"). Or un tel choix rend extrêmement difficile l’appropriation de l’équivalence : "onze quarts" c’est aussi "onze divisé par 4". Nous allons montrer qu’il est bien préférable de donner du sens à 11/4 dans un contexte de partition de la pluralité ("11 divisé par 4") avant de le faire dans un contexte de fractionnement de l’unité.

Ce qui advient lorsqu'on introduit 11/4 comme 11 quarts

La question importante est la suivante : comment les pédagogues qui introduisent ainsi les fractions amènent-ils les enfants à s'approprier l'équivalence fondamentale, c'est-à-dire à comprendre que 11 quarts, c'est 11 divisé par 4 ? Les enfants sont censés le découvrir lors de la recherche de la partie entière de 11/4 en raisonnant comme suit : à chaque fois qu'il y a 4 quarts dans 11 quarts, cela fait une unité ; il faut donc chercher : "En 11 quarts, combien de fois 4 quarts ?", c'est-à-dire faire la division de 11 par 4.

En apparence un tel raisonnement semble établir l'équivalence fondamentale. Mais en apparence seulement. En effet, être capable de mobiliser la division comme outil pour trouver la partie entière d'une fraction n'assure nullement que, réciproquement, on sache que toute division peut être considérée comme la recherche de la partie entière d'une fraction.

Si on demande à quelqu'un d'inventer un problème correspondant à 11 : 4, il est très probable que le problème proposé sera du type partition de la totalité (4 objets de même prix valent 11 €) ; peut-être sera-t-il du type quotition (1 m de fil électrique vaut 4 €, j'en ai acheté pour 11 €). Il n'y a pratiquement aucune chance que le problème inventé soit du type "11 personnes mangent chacune un quart de pizzas. Quelle est la quantité de pizzas nécessaire ?". Ainsi, on peut savoir que pour chercher la partie entière de 11/4, il convient de calculer "11 divisé par 4" sans savoir que "11 : 4 = 11 / 4".

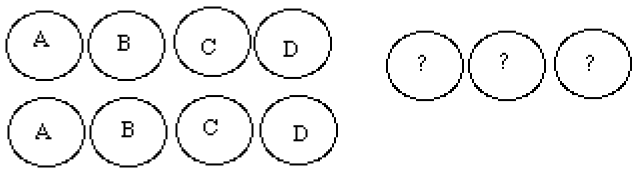
Fondamentalement la raison en est que "11 : 4" évoque une pluralité d'*unités* alors que 11 / 4 évoque une pluralité de *quarts d'unités*. Ce ne sont pas les mêmes objets psychologiques sur lesquels on opère : lors de la recherche de la partie entière, le "monde de la division" et "le monde des fractions" ne sont que très localement reliés. Pour l'essentiel, ils restent des "mondes séparés".

Lorsque 11/4 est introduit comme 11 quarts, il donc très difficile d'établir l'équivalence 11 : 4 = 11 / 4. Mais la situation est pire concernant 3 : 4 (cas des fractions inférieures à 1). En effet, lorsqu'on cherche la partie entière de 11/4 ainsi : "Dans 11 quarts, il y a 2 fois 4 quarts et il reste 3 quarts", à aucun moment on ne cherche à connaître "3 divisé par 4". Le sens "3 quarts" est le seul qui soit mobilisé dans ce raisonnement. En somme, si la recherche de la partie entière de 11/4 n'établit pas l'équivalence "11 : 4 = 11 / 4", concernant l'équivalence "3 : 4 = 3 / 4", c'est bien pire : elle n'est pas même abordée.

Il ne faut pas s'étonner qu'une moitié seulement des élèves sachent que 67 : 100 = 67 / 100 à l'entrée en 6e (Evaluation nationale 1997). Le seul moment pédagogique censé les aider à comprendre cette équivalence n'a pas pu fonctionner.

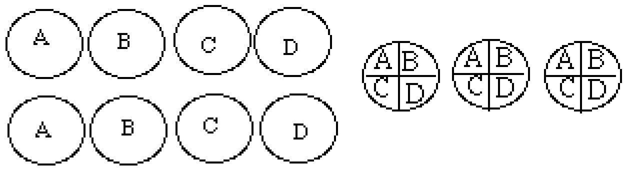
Ce qui advient lorsqu'on introduit l'écriture 11/4 comme "11 divisé par 4" dans un contexte de partition de la pluralité

Supposons qu'il faille partager équitablement 11 pizzas entre 4 personnes notées A, B, C et D. On commence par donner 2 pizzas à chacun.



Mais il faut de plus donner du sens à "3 partagé en 4".

Le partage de 3 pizzas entre 4 personnes notées A, B, C et D conduit le plus souvent au schéma suivant :



L'écriture qu'on introduit pour rendre compte du partage des 11 pizzas est la suivante : 11/4 = 2 + 3/4

Elle se lit "11 divisé par 4 est égal à 2 (quotient de la division euclidienne) plus le reste 3, lui-même divisé par 4". Le schéma précédent montre qu'on va pouvoir faire le lien entre "3 divisé par 4" et "3 quarts" (la suite de la progression est exposée plus loin).

Par ailleurs, une différence importante avec la progression qui vient d'être analysée, est la suivante : dès son introduction, la barre de fraction acquiert l'un des deux "grands sens" de la division, celui qui est prototypique : la partition. Il n'y aura donc aucune difficulté, le moment venu, à faire le lien avec l'usage de touche ":" de la calculette : la barre de fraction, comme cette touche, sert à résoudre cette large classe de problème. Le "monde de la division" et "le monde des fractions" ont en commun tous les problèmes dont la sémantique évoque une partition. Ils sont donc très largement reliés alors que dans la progression qui commence par "11 quarts", il y a toutes les chances pour que ces mondes ne le soient que très localement.

Par ailleurs, quand il s'agira, au CM2, d'apprendre à "pousser la division après la virgule" pour faire une approximation décimale du résultat d'une division comme 17 : 3 (= 5,666...), le fait de connaître une expression exacte du résultat (5 + 2/3) aidera les enfants à comprendre la notion même de valeur approchée : quand on peut exprimer ce vers quoi on tend, on comprend mieux la nature même du geste d'approximation.

Finalement, le choix d'introduire la barre de fraction dans un contexte de partition de la pluralité plutôt que dans un contexte de fractionnement de l'unité, aide d'une part à l'appropriation de l'équivalence fondamentale qui fonde la notion de fraction et d'autre part à comprendre que les décimaux permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue. En résumé, ce choix aide doublement à la conceptualisation des décimaux.

Commencer par le sens le moins "naturel" ?

Abordons une dernière objection possible. On peut considérer que la partition de la pluralité est un sens moins "naturel" que celui qui est lié au fractionnement de l'unité. Pour partie, ce sentiment résulte du fait que l'oralisation la plus fréquente de *a/b* est *a bièmes*.

Du coup, cela peut sembler paradoxal de commencer par le sens le moins naturel (*a* divisé par *b*). Ce paradoxe repose en grande partie sur une confusion. En effet, le sens divisé, bien que peu naturel, n'en est pas pour autant plus difficile : "peu naturel" et "difficile" ne sont pas synonymes. Il y a bien des choses auxquelles on ne pense pas "naturellement" et qui, quand on les découvre, paraissent simples (Comment n'y ai-je pas pensé plus tôt ?). Plus haut, nous avons commencé à présenter une façon simple d'introduire une "nouvelle division", celle où l'on partage le reste, de la noter *a/b* tout en disant aux élèves que cette écriture se lit "*a* divisé par *b*". Nous verrons que la suite de cette progression n'offre pas plus de difficultés.

Allons même plus loin : lorsque le sens le moins naturel n'est pas plus difficile à acquérir que l'autre, il faut résolument aborder ce sens le moins naturel en premier. En effet, au CM1, la séquence où l'on étudie pour la première fois les fractions, est, pour les élèves, un évènement. La nouveauté du sujet abordé, crée une sorte de "prime à l'apprentissage" pour le sens qui est privilégié lors de cette situation d'introduction. Il est donc judicieux de réserver cette "prime à l'apprentissage" au sens des fractions qui est le moins naturel : la partition de la pluralité. Sinon, on l'attribue au sens le plus naturel et on ne fait que renforcer la difficulté d'accéder à l'autre sens. En l'affaire, il n'y a pas de symétrie !

Notre choix, en l'occurrence, est identique à celui que nous avons avancé dans le cas de la division euclidienne. Celle-ci, en effet, repose sur l'équivalence entre la partition et la quotition. C'est la quotition, c'est-à-dire le sens le moins naturel (celui qui n'est pas véhiculé par le mot "partage"), que nous avons choisi de privilégier lors de la situation d'introduction de cette opération.

Retour au plan du texte

La notion de conflit entre l'économie de la représentation et celle du calcul pour enseigner l'équivalence qui fonde le concept de fraction

Lorsque le pédagogue a choisi de donner du sens à *a/b* dans un contexte de partition de la pluralité, comment peut-il s'y prendre pour que la même écriture, *a/b* , acquière l'autre sens ? Comme dans le cas de la soustraction ou de la division euclidienne, le concept central que nous utiliserons pour penser la progression est celui de *conflit entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul.*

L'utilisation de ce concept amène, comme dans le cas de la soustraction et de la division euclidienne, à distinguer 4 sortes de problèmes qu'il va nous falloir ordonner parce qu'ils constitueront autant de jalons sur le parcours des enfants.

Ces problèmes sont obtenus en croisant deux facteurs :

- La sémantique de l'énoncé qui détermine l'économie de la représentation : l'énoncé décrit-il une situation de partition de la pluralité ou de fractionnement de l'unité ?

- La taille relative des nombres qui détermine l'économie du calcul : *a* est-il supérieur à *b* (la fraction est supérieure à 1) ou bien *a* est-il inférieur à *b* ? Dans ce dernier cas, en effet (par exemple, pour 3 pizzas partagées en 4, ce qu'on écrit 3/4), le calcul économique est celui qui consiste à opérer sur une seule pizza plutôt que d'en utiliser trois, c'est-à-dire à utiliser le geste mental du fractionnement de l'unité. Dans le cas de 153/4, en revanche, la recherche de la partie entière invite à calculer la division de 153 par 4, c'est-à-dire à utiliser le geste de la partition de la pluralité.

Les 4 énoncés obtenus en croisant ces deux facteurs, sont rapportés ci-dessous.

Dans les problèmes B et D, il y a donc un *conflit entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul* au sens où le geste mental qui conduit à une représentation économique est différent de celui qui conduit à un calcul économique. Ces problèmes favorisent la substitution d'un geste mental à l'autre qui est lui est équivalent. Ils joueront donc un rôle important dans la progression.

Dans les problèmes A et C, on peut parler au contraire de *concordance entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul*, au sens où le geste mental qui conduit à une représentation économique est le même que celui qui conduit à un calcul économique.

Première étape :

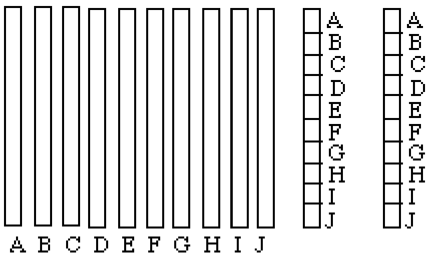
a/b est défini comme "a divisé par b"

Pour la leçon d'introduction, nous avons donc choisi de privilégier le "geste mental" de la partition de la pluralité. C'est évidemment un problème de type A (situation de partage d'une quantité continue *a* en *b* parts, quand *a* est supérieur à *b*) qui servira de support pour une telle séquence parce que dans un tel problème, l’économie de la représentation, comme celle du calcul, invitent à mettre en œuvre le geste mental de la partition de la pluralité, ce qui en facilite l’enseignement.

Au cours de cette séance, les enfants ont, par exemple, à résoudre les problèmes suivants : "7 verres de jus d’orange sont à partager entre 3 enfants. Quelle sera la part de chaque enfant ?" et "12 barres de chocolat sont à partager entre 10 enfants. Quelle sera la part de chaque enfant ?"

Dans le cas du premier problème, sa résolution conduit à introduire la barre de fraction, symbole d’une nouvelle division "où l’on partage le reste" : 7/3 = 2 + 1/3 qui se lit "7 divisé par 3 est égal à 2 plus le reste, c’est-à-dire 1, lui-même divisé par 3".

Le deuxième problème conduit à l’égalité : 12/10 = 1 + 2/10 qui se lit "12 divisé par 10 est égal à 1 plus le reste, c’est-à-dire 2, lui-même divisé par 10". La schématisation qui accompagne la résolution de ce second problème est moins évidente que celle du premier. Elle est reproduite ci-dessous (chacun des 10 enfants est représenté par les lettres A, B... J) :



On voit que lorsqu’il s’agit de partager le reste de 2 tablettes de chocolat entre 10 personnes, les enfants proposent la plupart du temps que chaque tablette soit partagée en 10 et que chaque personne forme sa part en prélevant "un divisé par dix" sur chacune des tablettes. Ce mode de résolution est en effet le plus accessible (il s’agit du "premier niveau de résolution" de ce type de problème).

Remarque : devant des écritures du type 3/4, 2/10, etc., il est important de les oraliser, à ce moment de la progression, "3 divisé par 4", "2 divisé par 10", etc. Cela ne sera pas facile pour l’enseignant, car ses habitudes sont plutôt de dire "3 quarts", "2 dixièmes", etc. Mais c’est l’objectif de l’étape suivante d’établir l’équivalence entre ces deux façons de s’exprimer. La seule exception à cette recommandation est celle où le numérateur est 1 car alors, "1 quart" est de manière évidente synonyme de "1 divisé par 4". Dès lors, quand des élèves utilisent la formulation "1 quart", il est normal de la retenir tout en lui donnant le synonyme "1 divisé par 4".

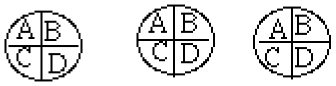
Deuxième étape : "3 partagé en 4" c’est "3 quarts"

La barre de fraction a été introduite dans un contexte où elle renvoie à la partition de la pluralité. Notre objectif est maintenant que les élèves s’approprient l’équivalence entre ce geste mental de partition de la pluralité et celui du fractionnement de l'unité. Les problèmes de type B (la sémantique est du côté de la partition de la pluralité, mais le calcul économique du côté du fractionnement de l'unité), sont évidemment adaptés à un tel objectif : les enfants commencent par se représenter le geste de partition de la pluralité, l’économie du calcul les conduit à l’autre geste.

Dans la séquence correspondante, les élèves sont confrontés à une activité où ils doivent partager équitablement 3 pizzas entre 4 personnes (Anne, Betty, Céline et Diane), mais dans deux contextes différents.

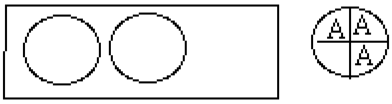
Dans le premier de ces contextes, les élèves ont la possibilité de partager chacune des pizzas alors que dans l’autre contexte, il n'est plus possible de procéder ainsi parce qu’une seule des pizzas est sortie du four et Anne doit prélever sa part sans toucher aux autres.

Nous avons déjà présenté la procédure que la plupart des enfants adoptent dans le premier de ces contextes (chaque enfant est désigné par son initial A, B, C ou D) :



Pour partager équitablement 3 pizzas entre 4 personnes, le premier niveau de procédure que des enfants (ou même des adultes) emploient, consiste en effet à partager chacune d'elle en 4.

Or il n'est plus possible de procéder ainsi dans le second contexte. En effet, une seule pizza est sortie du four et Anne doit prélever sa part sans toucher aux autres pizzas.



C'est à ce moment que les élèves sont susceptibles de prendre conscience que lors d'un partage équitable de 3 pizzas entre 4 personnes, la valeur d'une part est de 3 fois un quart.

Remarque

On pourrait croire que l'enfant qui partage chaque pizza en quarts et qui prélève un quart sur chacune d'elle (1er niveau de procédure) utilise l'équivalence fondamentale (3 partagé en 4, c'est 3 quarts). En fait, l'apparence est trompeuse parce que lorsqu'il s'y prend ainsi, l'enfant utilise la même procédure que pour partager équitablement une pizza, une quiche et une tarte. Rien n'assure que les quarts prélevés sur chacune des trois pizzas soient considérés comme égaux. En revanche, le prélèvement de chaque quart sur la même pizza atteste de cette égalité et, finalement, de l'équivalence entre "3 divisé par 4" et "3 quarts".

Troisième étape : équivalences d'écritures et comparaison de fractions

Dans la troisième étape, notre objectif est d'aider les enfants à s'approprier le geste mental qu'ils viennent tout juste de découvrir : celui du fractionnement de l'unité. Nous utilisons pour cela, des situations comme celle du problème C ("On prend 3 fois un quart d'une unité. Quelle est la valeur totale ?") parce que la représentation économique et le calcul économique sont tous les deux associés au fractionnement de l'unité.

Une question se pose cependant : avec un tel énoncé, le maître sollicite une schématisation (prendre les 3/4 d'une pizza, par exemple) mais ne pose pas réellement un problème. En fait, cette partie de la progression correspond au travail sur les équivalences d'écritures (1/2 = 5/10, par exemple) et les comparaisons de fractions ("comparer 1/2 et 4/10", par exemple).

En effet, certaines équivalences d'écritures doivent nécessairement être enseignée dès le CM1, bien qu'elles n'apparaissent pas explicitement au programme. C'est le cas, par exemple, de l'équivalence 3/10 = 30/100 qui justifie qu'avec les écritures à virgule, on puisse écrire 0,3 = 0,30 (on peut "écrire un zéro" à droite des chiffres après la virgule !). Il est par ailleurs souhaitable d'enseigner dès le CM1 que 1/2 = 5/10 = 50/100 ou encore 1/4 = 25/100 et 3/4 = 75/100. Ces égalités sont fondamentales parce qu'elles fixent des repères entre 0 et 1. Par exemple, savoir que 5/10 est la moitié de 1 et que 7/10 est plus petit que 3/4 aide à situer 6/10 entre 0 et 1.

Elles joueront par ailleurs un rôle fondamental dans l'étude des pourcentages au CM2.

Un tel enseignement peut prendre deux formes :

- soit on enseigne la règle de la réduction au même dénominateur dans sa plus grande généralité ("On ne change pas la valeur d'une fraction lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur par un même nombre") puis on applique cette règle aux cas particuliers tels que 3/10 = ?/100 ;

- soit on enseigne directement les seules équivalences qui "sont au programme", en s'appuyant sur une représentation imagée, sans se soucier si les enfants abstraient ou non la règle générale.

C’est cette seconde solution que nous avons évidemment retenue parce que, pour justifier la règle générale, il faut utiliser l’argument de la compensation qu’il est difficile de comprendre pour des élèves de cet âge.

Quatrième étape : 155 tiers, c’est aussi "155 divisé par 3"

L’équivalence entre le geste mental de la partition de la pluralité et celui du fractionnement de l'unité a déjà été étudiée, lors de la deuxième étape : il s’agissait de prendre conscience qu’un problème dont l’énoncé parle d’une partition de la pluralité, peut se résoudre par un fractionnement de l'unité.

Dans l’étape présente, l’équivalence sera établie "en sens inverse" : il s’agit de prendre conscience qu’un problème dont l’énoncé parle d’un fractionnement de l'unité, peut se résoudre par une partition de la pluralité, c’est-à-dire en faisant une division.

Nous utiliserons évidemment l’autre type de problèmes dans lequel l’économie de la représentation est en conflit avec celle du calcul : les problèmes de type D (On prend 155 fois un tiers d’une unité. Quelle est la valeur totale ?).

La dynamique d’une telle séance va de soi : on dispose de 155 tiers ; or à chaque fois qu’on a 3 tiers, cela correspond à une unité ; on est donc amené à chercher : "En 155 tiers, combien de fois 3 tiers ?". D’où la mobilisation de la division euclidienne.

Retour au plan du texte

Les autres choix fondamentaux et la fin de la progression

A ce moment de la progression, les enfants se sont appropriés les deux sens de l’écriture a / b; ils savent produire des écritures équivalentes de 1/2, 1/4, 3/4, 1/10, 2/10... et ils savent comparer ces fractions simples. Ils n’ont toujours pas *additionné* ces fractions simples. Cela relève d’un choix délibéré.

Ne pas introduire d’emblée l’addition des fractions

Même lorsqu’on limite l’apprentissage de l’addition aux quelques fractions simples du programme (demis, quarts, dixièmes et centièmes), une difficulté surgit, que les enfants rencontrent pour la première fois : face à 3/4 + 57/100, par exemple, les élèves voient des nombres (3, 4, 57, 100), ils voient le signe "+", symbole de l’addition entre les entiers et ils doivent absolument se garder d’additionner ces nombres sous la forme 60/104, par exemple (ce qui correspond à la somme des numérateurs et à celle des dénominateurs). La façon dont les enfants ont l’habitude d’opérer avec le signe "+" et les écritures d’entiers, ne doit pas "contaminer" l’usage des mêmes symboles lorsqu’ils désignent des fractions !

Pour les maîtres, il ne s’agit pas seulement d’enseigner un nouveau savoir-faire, il s’agit de l’enseigner dans un contexte où les enfants peuvent avoir l’impression (fausse) qu’ils savent déjà faire. Le problème qu’on leur pose, ressemble à un problème qu’ils savent résoudre depuis longtemps.

Dans leur future scolarité, ils auront évidemment bien d’autres occasions de se retrouver dans une telle situation. Dès le CM2, par exemple, ils seront conduits à calculer 52 x 0,25 et à trouver un résultat plus petit que 52 ! Alors que pendant plusieurs années, la multiplication a toujours donné un résultat plus grand que les deux nombres de départ, ce n’est plus le cas !

L’addition de deux fractions est leur première rencontre avec ce type de situation. Cet obstacle au calcul de 3/4 + 57/100, sera mieux surmonté si les enfants ont une bonne maîtrise conceptuelle des entités représentées par 3/4 et 57/100.

C'est pourquoi nous avons choisi d'introduire le signe "+" après que les enfants se soient appropriés les deux sens de l'écriture *a / b*, aient appris à en produire des écritures équivalentes et à comparer les fractions simples du programme.

Utiliser d'abord des unités de mesure non conventionnelles, pour favoriser l'appropriation de l'idée de fractionnement

Les élèves disposent de règles en carton qui sont graduées en stylos, 1/2 stylo, 1/4 de stylo, 1/10 de stylo et 1/00 de stylo.

Les différentes activités qu'ils mènent avec ce matériel consistent à :

- Repérer une longueur, soit à partir de l'origine de la règle, soit entre deux points, et se rappeler, à cette occasion que 12/100 = 1/10 + 2/100 ou encore que 20/100 = 2/10

- Comparer la longueur de deux lignes brisées : pour cela il faut mesurer les lignes brisées (tous les résultats sont fractionnaires), puis sommer les mesures obtenues (et donc calculer 93/100 + 7/10, par exemple) et comparer les résultats qui, évidemment, sont des nombres fractionnaires.

- S'ils ont obtenu 1 + 63/100 et 2 + 4/10 comme longueurs respectives de chaque ligne brisée, on leur demande laquelle de ces longueurs est la plus proche de 2 stylos ? Ils sont donc amenés à se représenter des écarts de longueurs, en s'aidant de leur règle par exemple : entre le repère 1 + 63/100 et le repère 2, sur la règle, il y a 37/100. Or ce nombre est plus petit que 4/10.

- Ils ont à résoudre ce même type de problèmes, mais hors contexte :

Quel est le nombre le plus proche de 2 ?

1 + 85/100 ou 2 + 2/10

Le lecteur aura reconnu, dans ce type de problèmes, ceux dont nous avons souligné l'importance dans l'introduction de ce texte, parce qu'ils constituent un bon test de la conceptualisation des décimaux chez l'enfant (Cf. J. Bolon, 1996).

- Ils doivent enfin ordonner des nombres donnés tantôt sous forme de "division-fraction", tantôt par leur décomposition en entiers, dixièmes et centièmes, par exemple.

Supposons que les premières de ces activités soient menées avec le double-décimètre plutôt qu'avec une règle graduée en stylos. Les enfants utiliseraient alors leurs schèmes familiers de mesure en millimètres et cm et n'utiliseraient d'aucune façon le fait que le millimètre est le centième du dm ou encore que le centimètre en est le dixième.

Le pédagogue n'a pas le choix : s'il veut que ses élèves procèdent à des activités de mesure en reportant mentalement un étalon et ses fractions décimales, il ne faut pas que cet étalon entre dans un système conventionnel de mesure que les enfants utilisent depuis plusieurs années et dans lequel le 1/10, le 1/100, etc. de l'unité, ont des noms spécifiés (le décimètre, le centimètre, par exemple) et fonctionnent eux-mêmes comme unités entières à l'intérieur de ce qu'on a appelé précédemment un système de "nombres complexes". Sinon, il n'y a que les très bons élèves qui font l'effort d'essayer de traduire leurs connaissances anciennes (mm, cm, dm) dans le vocabulaire nouveau que le maître leur propose (1/100, 1/10 et unité). La grande majorité des élèves résolvent ces problèmes avec leurs connaissances anciennes et toute idée de fractionnement disparaît. L'idée de décimal disparaît avec elle.

Certains pédagogues seront peut-être étonnés de l'usage que nous faisons des pizzas, verres de jus d'orange, tablettes de chocolat ou règles graduées en stylos, mais l'usage préalable de ces unités non-conventionnelles, nous semble incontournable.

Enseigner l’écriture à virgule comme un simple changement de notation

L’écriture à virgule des nombres décimaux est introduite en utilisant la calculette. Les élèves savent que la "division-fraction" 143/10 a pour résultat 14 + 3/10 et la "division-fraction" 7893/100 pour résultat 78 + 93/100. En revanche, quand on tape ces opérations sur une calculette (avec la touche ":"), on voit apparaître 14.3 pour 143/10 et 78.93 pour 7893/100. En examinant d’autres cas et notamment des "divisions-fractions" par 2 et 4, les élèves découvrent facilement le principe de l’affichage de la calculette : elle sépare la partie entière et la partie fractionnaire par un point, le chiffre immédiatement à droite du point désigne des dixièmes et celui encore à droite des centièmes (les millièmes seront étudiés au CM2).

L’écriture avec le point ou avec une virgule est donc introduite comme un simple changement de notation. Au moment de cette introduction, les enfants savent déjà coordonner les deux sens de l’écriture a/b, ils savent comparer, additionner les fractions simples, déterminer des écarts, etc. Toutes les connaissances nécessaires sont ainsi déjà là. C’est délibéremment que nous avons choisi de favoriser leur appropriation en utilisant la barre de fraction comme système de notation parce que l’écriture à virgule masque la véritable nature de ces nombres.

Au CM1, terminer la progression sur les décimaux, c’est, pour l’essentiel, continuer à faire fonctionner les mêmes connaissances dans le contexte où les exercices sont proposés avec des nombres à virgule plutôt qu’avec des fractions. Or, pour favoriser le transfert des connaissances d’un contexte à l’autre, nous allons montrer qu’il est essentiel de faire oraliser les nombres à virgule, en explicitant les dixièmes, centièmes, etc.

Remarque sur l’utilisation de la calculette lors de ces séquences

Un premier objectif de ces séquences est évidemment le changement de notation (des fractions décimales vers les nombres à virgule) que nous avons qualifié de "simple" parce qu’aucune connaissance nouvelle n’est introduite à cette occasion. Cependant, l’enjeu de ces séquences, grâce à l’usage de la calculette, est plus important qu’il n’y paraît de prime abord : ce n’est pas seulement l’équivalence entre la notation fractionnaire et la notation à virgule des nombres décimaux qui est en jeu dans ces séquences, c’est aussi l’équivalence entre le signe "divisé" de la calculette, porteur de tous les usages sociaux de la division, et la barre de fraction. Ces séquences font partie de celles qui contribuent à relier étroitement le "monde de la division" à celui des fractions.

Ainsi, à ce moment de la progression, l’égalité 67 : 100 = 67 / 100 = 0,67 qui, d’habitude est si difficile à comprendre pour les élèves, apparaît comme allant de soi. La raison en est que, dès le début de la progression, on s’est donné les moyens de relier entre elles les différentes significations en jeu dans ces écritures : "67 divisé par 100", c’est "67 centièmes" (équivalence dont nous avons montré qu’elle fonde le concept de fraction).

Faire oraliser systématiquement les nombres à virgule, en explicitant les dixièmes, centièmes, etc.

Considérons par exemple, l’exercice suivant que les enfants ont appris à résoudre lorsqu’il est posé avec des fractions.

Quel est le nombre le plus proche de 2 ?

1 + 85/100 ou 2 + 2/10

Après l’introduction des écritures à virgule, le même exercice est posé sous la forme :

Quel est le nombre le plus proche de 2 ?

1,85 ou 2,2

Si le pédagogue est soucieux d'obliger les élèves à oraliser 1,85 sous la forme "1 virgule 85 centièmes" et 2,2 sous la forme "2 virgule 2 dixièmes" plutôt que "1 virgule 85" et "2 virgule 2" comme le font souvent les adultes, il suffit que l'élève oralise la consigne pour que l'énoncé du deuxième exercice apparaisse immédiatement comme renvoyant à la même tache que le premier. L'élève est alors en mesure de le résoudre immédiatement : "A partir de 1 virgule 85 centièmes, il faut 15 centièmes pour aller à 2. En revanche, 2 virgule 2 dixième est à 2 dixièmes de 2, c'est-à-dire 20 centièmes de 2. C'est 1 virgule 85 centièmes, le plus proche de 2".

C'est seulement lorsqu'on procède à une telle oralisation "signifiante", que la tâche avec les nombres à virgule n'offre pas plus de difficulté que la même tache avec les écritures fractionnaires. L'enseignant qui adopterait la progression que nous avons élaborée, sans exiger une telle oralisation, ferait un beau gâchis : il aurait consacré beaucoup de temps pour que les enfants s'approprient le concept de décimal lorsque ces nombres sont représentés par des fractions et, par la suite, il ne se donnerait pas les moyens que les enfants réinvestissent toutes ces connaissances quand ces nombres sont représentés sous leur forme la plus fréquente mais la plus leurrante : celle des écritures à virgule.

Retour au plan du texte

Conclusion

Pour enseigner un contenu tel que les fractions simples et les décimaux, un grand nombre de progressions sont évidemment possibles. Pour situer celle qui a été présentée ici dans cet ensemble de possibles, esquissons une comparaison avec les deux progressions qui servent le plus souvent de références : celle de R. Douady d'une part et de G. Brousseau d'autre part.

Ces progressions se présentent comme des suites de situations qui permettent que les élèves aient une responsabilité importante dans le processus d'élaboration des connaissances. L'enchaînement des significations y est par ailleurs minutieusement étudié. Ces auteurs ont été parmi les premiers à se donner le projet d'élaborer ce genre de progressions qui relèvent d'une sorte d'"épistémologie expérimentale". Leur travail a donc été pionner.

De plus, il convient de souligner leur rôle précurseur quant au choix fondamental, qui a été aussi le nôtre, d'enseigner les fractions avant les décimaux.

Mais au-delà de ce choix, il existe des différences importantes entre les progressions qu'ils ont élaborées et celle qui a été avancée ici.

Une comparaison avec les deux progressions de référence (Douady, Brousseau)

R. Douady introduit les fractions en s'appuyant sur le modèle du fractionnement de l'unité (7/4 est défini comme 7 fois un quart de l'unité). De notre point de vue, faire un tel choix, c'est renforcer le modèle le plus "naturel", celui qui est véhiculé par le langage quotidien, et donc faire obstacle à l'appropriation par les élèves de l'autre modèle (celui de la partition de la pluralité). Dans la progression avancée par Douady, "pousser" la division a : b trois chiffres après la virgule, par exemple, revient à situer la fraction a / b au millième près. Elle pose donc comme évidente l'équivalence a : b et a / b, ce qui est loin d'être le cas pour les enfants lorsque l'écriture fractionnaire est introduite avec le sens a bièmes. Comme nous l'avons montré, il y a là un "glissement de sens" qui, de notre point de vue, est très gênant.

Brousseau, lui, introduit les fractions dans la situation suivante : il faut trouver un moyen de désigner l'épaisseur d'une feuille de papier alors que cette épaisseur est trop petite pour qu'on la mesure directement. Les enfants établissent donc que si 19 feuilles mesurent 2 mm, alors 38 feuilles mesurent 4 mm, etc.

Dans la situation où 50 feuilles ont une épaisseur totale de 4 mm, la fraction est introduite de la façon suivante (p. 17) :

"On dit que (ce) papier a une épaisseur de 4 mm pour cinquante feuilles ou encore 4 pour cinquante millimètres et, le plus souvent, de 4 cinquantièmes de mm et on écrit ceci à l'aide de la fraction 4/50."

A première vue, une telle formulation est critiquable puisque, de manière purement verbale, on passe subrepticement du modèle de la partition de la pluralité (4 mm pour cinquante) à celui du fractionnement de l'unité (4 cinquantièmes de mm).

En fait, les enfants ne mobilisent ni l'un, ni l'autre de ces deux modèles. En effet, en ce début de progression, à aucun moment l'enseignant ne parle ni de fractionnement, ni de partage. Ainsi, pour savoir si 57/35 est plus petit ou plus grand que 1 mm, les enfants (p. 36 - 7e séance de la progression) n'utilisent ni la partition de la pluralité (57 mm partagés en 35, ça fait combien ?), ni le fractionnement de l'unité (57 fois un trente-cinquième de mm, c'est combien ?). Ils raisonnent ainsi : 1 mm, c'est quand on a une épaisseur de 35 mm pour 35 feuilles ; quand on a 57 mm pour 35 feuilles, c'est plus que 35 mm pour 35 feuilles. Les enfants raisonnent donc sur des couples d'entiers et non sur le fractionnement ou la partition d'entiers.

Remarquons que la situation qui sert à Brousseau pour introduire les fractions et la nôtre sont similaires, mais elles sont utilisées de façons très différentes : alors qu'il aurait pu mettre d'emblée les enfants dans une situation de mesure en leur faisant déterminer la mesure "absolue" d'une feuille (si une épaisseur totale de 2 mmn est obtenue avec 19 feuilles, quelle est l'épaisseur d'1 feuille ?), il a choisi de faire raisonner les enfants avec des "mesures relatives" (2 pour 19, c'est comme 4 pour 38, etc.), c'est-à-dire de traiter cette situation sur le modèle des proportions. Quand le maître introduit la barre de fraction, c'est d'ailleurs l'oralisation de la proportion ("a pour b") qui est privilégiée. Le mot "divisé" est soigneusement évité, peut-être parce qu'il conduirait les enfant à chercher une "mesure absolue" (2 mm divisé par 19). Remarquons que le choix de la grandeur à mesurer est cohérent avec cette option théorique : une épaisseur de 2 mm pour 19 feuilles est si petite qu'elle semble *a priori* peu accessible à la seule mesure que connaissent les enfants, c'est-à-dire la "mesure absolue".

Examinons maintenant comment des enfants qui raisonnent ainsi sur des couples d'entiers, s'approprient l'équivalence entre la partition de la pluralité et le fractionnement de l'unité. Considérons, par exemple, l'équivalence "3 divisé par 4", c'est "3 quarts". Comme nous l'avons vu, la difficulté résulte du fait que la première expression renvoie à une pluralité d'unités tandis que la seconde renvoie à une pluralité de fractions de l'unité et qu'on ne raisonne donc pas sur les mêmes objets psychologiques.

Dans la progression de Brousseau, avec le vocabulaire qu'il utilise, cette relation s'exprime : "3mm pour 4" est une épaisseur 3 fois plus grande qu'une autre de "1mm pour 4". Or, le fait de raisonner ainsi sur des couples d'entiers fait disparaître la difficulté car les objets psychologiques sont alors homogènes. Mais la difficulté est-elle réellement surmontée ou ne l'est-elle qu'en apparence ? Est-elle surmontée conceptuellement, parce que les enfants se sont appropriés une équivalence entre des *gestes mentaux* ? Ou bien s'agit-il seulement d'une équivalence "formelle" qui renvoie seulement à des *règles de manipulation d'écritures* ?

La suite de la progression permet de répondre à cette question. En effet, après la somme et la différence de deux fractions, les élèves apprennent à multiplier puis à diviser une fraction par un entier. Pour calculer 11/3 : 9, ils apprennent qu'il faut multiplier par 9 le dénominateur de cette fraction (11/27) ou multiplier par 9 le dénominateur de n'importe quelle fraction qui lui est égale. Cependant, à la 39e séance (p. 145), pour trouver le résultat de 11 : 9, les enfants ont besoin que le maître fasse un rappel collectif : "11 = 11/1 et pour diviser une fraction, on multiplie son dénominateur".

La suite des écritures est donc la suivante :

11 = 11 / 1

11 : 9 = 11/1 : 9

11 : 9 = 11 / 1x9

11 : 9 = 11 / 9

Autrement dit, les enfants sont plus à l'aise pour calculer 11/3 : 9 que 11 : 9 (Cf. p. 148). Dans cette progression, le moins qu'on puisse dire est que l'égalité 11 : 9 = 11 / 9 ne va pas de soi !

Plus généralement, ce type de raisonnement sur des classes de couples d'entiers nous semble hors de portée d'un grand nombre d'élèves du Cours Moyen. Piaget appelait cette sorte d'opérations intellectuelles "au second degré" (parce que ce sont des opérations sur des opérations) des "opérations formelles". Il considérait que ce genre d'opérations intellectuelles n'est guère accessible avant 12 ans. Ainsi, certains enfants, dans la progression de Brousseau, éprouvent longtemps des difficultés à tout simplement comprendre que 4/50 est *un* nombre qui mesure *une* épaisseur et non seulement un couple de nombres qui désigne un tas de feuilles (Cf. p. 18). Cela n'est guère étonnant. Il ne s'agit pas, selon nous, de difficultés liées à tel ou tel point marginal de la progression. Il convient de s'interroger sur la pertinence de ce type de progression pour des élèves de Cours Moyen.

Quels résultats dans les classes expérimentales ?

La progression présentée ici est donc très différente de ces deux progressions de référence. Elle est tout aussi différente des progressions classiques (aucune, à notre connaissance, n'enseigne, comme nous le faisons, la partition de la pluralité avant la partition de l'unité).

Au delà de ces comparaison, que dire des résultats obtenus dans les classes expérimentales ? Considérons à nouveau l'exercice suivant.

Quel est le nombre le plus proche de 7:

6,9 ou 7,08 ?

Nous avons vu que la réussite à cet exercice témoigne vraisemblablement d'une bonne conceptualisation des décimaux et qu'il n'est habituellement réussi que par 30% environ des élèves en CM2, 6ème et même 5ème.

Dans les classes expérimentales qui ont testé une première version de la progression présentée ici, nous avons observé 75% environ de réussite en fin de CM1, y compris dans des écoles situées en ZEP.

Un tel résultat doit évidemment être apprécié dans son contexte. D'une part les populations expérimentales réussissent toujours mieux que les populations d'élèves qui travaillent dans des conditions plus ordinaires. D'autre part, à travers les activités présentées ici, le lecteur aura perçu que la réussite à cet exercice faisait partie de nos objectifs alors que d'habitude, ce type de tâche n'est guère travaillé en classe. Qu'on nous permette cependant de souligner un point important : les 75% de réussite ont été obtenus sans jamais enseigner aux élèves la moindre règle du type : "Je ne change pas la valeur d'un nombre décimal en écrivant des zéros à droite de la virgule." La réussite observée résulte de connaissances conceptuelles et non de "trucs" qui permettent d'obtenir la solution sans avoir compris.

Il est clair cependant que seul un emploi plus généralisé de ce type de progression permettra d'en apprécier plus justement la valeur.

Haut de page